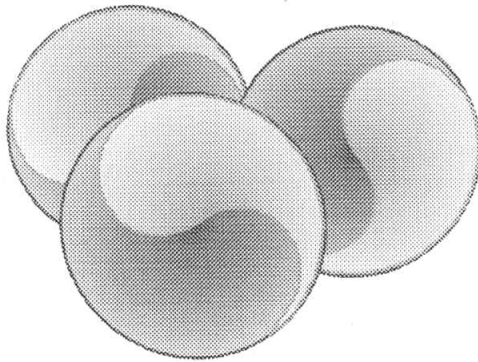


Henning Henriksen

hvordan
hopper
tennisbolde og bordtennisbolde?



Fysikforlaget

Henning Henriksen

**Hvordan hopper
tennisbolde og bordtennisbolde?**

Hvordan hopper tennisbolde og bordtennisbolde?
af Henning Henriksen

© Fysikforlaget
Slotsgade 2³
2200 København N

Tilrettelæggelse: Kai Gregersen

Tryk: Budolfi Tryk, Aalborg

ISBN: 87-7792-017-1

1. udgave, 1. oplag, 1998

Kopiering af denne bog er kun
tilladt i overensstemmelse med
overenskomst mellem Copy-Dan
og Undervisningsministeriet

Forord

til læreren: I dette temahæfte beskrives tennis- og bordtennisboldes hoppeegenskaber. Der arbejdes med simple fysiske begreber, men i stigende progression. I den sidste del af hæftet skal der arbejdes med regneark. Det gøres på en meget enkel måde, men de resultater, der kommer ud af regnearket, viser de konflikter, der opstår mellem model og virkelighed, og det er interessevækkende. Hæftet er skrevet til brug i 1.g, men det er også blevet anvendt i 2.g i forbindelse med arbejdet med bevægelseslovene fra den sædvanlige lærebog.

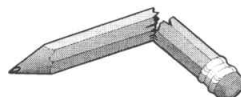
Af almindeligt udstyr skal der bruges mm-papir, stopur, tape, linealer, bordtennisbolde og tennisbolde. Tolv af hver vil være rigeligt til en klasse på 28 elever. Det kan anbefales at købe de trykløse tennisbolde; tennisbolde med overtryk ændrer med tiden egenskab ved at tabe luft. Boldene bør nummereres med en spritpen, så eleverne kan bruge den samme bold gennem hele forløbet.

På en blok dag, eller hvor flere timer er til rådighed, kan eleverne arbejde med hæftet ved at teksten læses løbende, idet eleverne efter hvert forsøg eller opgave sætter sig og læser den nye tekst, inden et nyt forsøg eller ny opgave påbegyndes. På denne måde har eleverne ikke lektier for hjemme, men til gengæld bør man kræve, at det skriftlige arbejde ved forsøg og opgaver bliver grundigt - og ordentlig opskrevet. Det anbefales, at eleverne arbejder sammen i mindre grupper af fx 3 personer, som evt. udformer en gruppe rapport.

Inden arbejdet starter, bør eleverne læse nedenstående regler for arbejdet.

til eleverne:

Intet forsøg må udføres,
før den foranstående teori
er helt forstået.



Hvert hold skal under hele øvelsen bruge den samme tennisbold og samme bordtennisbold

Alle besvarelser forklares grundigt og opskrives ordentligt.

Hvis det er muligt opstilles målinger og udregninger i skemaer eller tabeller.

Alle grafer forsynes med beskrivende overskrift, og på akserne skal der være angivet fysisk størrelse og enhed.

Indholdsfortegnelse

	side
Forord - til læreren	3
Forord - til eleverne	3
Indholdsfortegnelse	4
Potentiel energi og kinetisk energi	5
Internationale regler for godkendelse af tennis og bordtennisbolde	6
For hvert hop tabes energi	7
Boldens nedslagsfart	8
Hvordan beskriver en fysiker en bolds hoppeegenskab?	9
Stødtal for en godkendt bold	10
Hvad afhænger boldens hoppeegenskaber af?	11
Hvor langt falder man, og hvor lang tid tager det?	12
Hvilken rolle spiller luftmodstanden?	13
Nu spiller luftmodstanden med	15
Hvor lang tid kan en bold hoppe?	16
En bold der hopper uendelig mange gange	19
Hvor højt hopper bolden - hop efter hop	20
Hvor mange gange hopper en bold?	22
Kan en bold hoppe uendeligt langt?	23

Potentiel energi og kinetisk energi



Potentiel energi: Når en bold løftes op fra gulvet, får den potentiel energi. Boldens potentielle energi udregnes efter formelen:

$$E_{pot} = m \cdot g \cdot h \quad (1)$$

m er massen af genstanden målt i kilogram.

g er tyngdeaccelerationen, der i Danmark er $9,82 \text{ m/s}^2$.

h er højden målt i meter over et nulniveau.

Enheden for potentiel energi er joule (J).

Nulniveauet kan være gulvet eller en bordflade; det bestemmer vi.

En genstand har potentiel energi lig med nul, hvis den ikke er løftet, dvs. hvis den ligger på det gulv eller den bordflade, der er defineret som nulniveauet.

Opgave 1. En tennisbolds potentielle energi

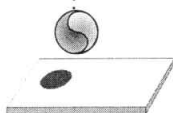
Vælg en tennisbold og skriv dens nummer ned.

Vej tennisbolden og nedskriv massen målt i kg.

Udregn den potentielle energi af en tennisbold, når den holdes i højden 2m og 54 cm.

Kinetisk energi: En bold, der bevæger sig, har kinetisk energi. Boldens kinetiske energi udregnes efter formelen:

$$E_{kin} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 \quad (2)$$



v er farten af bolden målt i meter pr. sekund.

Den kinetiske energi måles i joule (J).

Bolden øverst på tegningen har kinetisk energi lig nul, men den har potentiel energi. Under faldet omdannes den potentielle energi til kinetisk energi, efterhånden som højden mindskes og farten øges. Den kinetiske energi er således størst lige før bolden rammer pladen (nulniveauet).

Opgave 2. Den kinetiske energi af en bordtennisbold

En almindelig bordtennisbold vejer 2,5 gram. Den kan af en elitespiller smashes op til en hastighed på 170 kilometer i timen.

Hvor stor er bordtennisboldens kinetiske energi?

Den mekaniske energi: Summen af en bolds kinetiske og potentielle energi kaldes den mekaniske energi. dvs.

$$E_{mek} = E_{pot} + E_{kin} \quad (3)$$

Internationale regler for godkendelse af tennis- og bordtennisbolde

Oversat til dansk lyder reglerne:

Tennis: *En tennisbold, der slippes
fra en højde på 2 meter og 54 centimeter,
skal fra et betongulv hoppe op til mindst 135 cm
og højst 147 cm.*

(de "skæve" tal skyldes, at målene er i engelske tommer.
Bolden skal fra 100 tommer hoppe til mellem
53 og 58 tommer).

Bordtennis: *En bordtennisbold, der slippes
fra en højde på 30,5 cm (1 engelsk fod) over bordet,
skal hoppe til en højde på mellem 22 og 25 cm.*

Forsøg 1. Kan tennisbolden godkendes?

Sæt 3 små stykker tape på væggen i højderne 2,54 m, 1,47 m og 1,35 m. Tennisbolden slippes 10 gange fra den foreskrevne højde, og det noteres, om opspringshøjden ligger inden for det tilladte interval.

Hvor mange procent af resultaterne ligger indenfor det godkendte opspringshøjde-interval?

Det vurderes, om bolden kan godkendes.

Opgave 3. Energital for en tennisbold

En tennisbold slippes fra højden, $h_1 = 2,54$ m og hopper op til højden $h_2 = 1,47$ m.

Tegn en skitse af forløbet.

Hvad er boldens fart, når den slippes i højden h_1 ?

Hvad er boldens fart, når den efter hoppet når tophøjden h_2 ?

Udregn boldens tab i mekanisk energi.

Hvor mange procent af den mekaniske energi er tabt ved opspringet?

For hvert hop tabes energi

Opgave 4a. Det mindste energitab for en bordtennisbold

Udregn det mindste tab i mekanisk energi, som en bordtennisbold må have.

Hvor mange procent tab af den mekaniske energi er det?

Opgave 4b. Det største energitab for en bordtennisbold

Udregn det største tab i mekanisk energi, som en bordtennisbold må have.

Hvor mange procent af den mekaniske energi må der maksimalt tabes ved et opspring af en godkendt bordtennisbold?

Boldens opspring: Ved sammenstødet med bordet eller gulvet deformeres bolden, og ved at rette sig ud springer bolden op igen. Mens bolden stiger til vejrs vil den vibrere, indtil den efterhånden falder til ro (se tegningen).

Noget af boldens mekaniske energi mistes ved sammenstødet med gulvet og ved boldens vibrationer. Noget af den mekaniske energi omdannes til varme i bolden, og på grund af den mindre mekaniske energi når bolden ikke samme højde, hvor den startede.

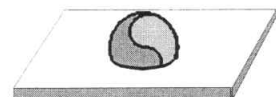
Forsøg 2. Kan en bold hoppe højere end start-højden?

Det kan ikke lade sig gøre med én bold, men med to bolde kan det godt.

Sæt en bordtennisbold oven på en tennisbold og lad dem falde samtidig. Måske lykkes det ikke første gang, men så prøv igen. Pas på øjne, briller, lamper og vinduer.

Hvor højt kan bordtennisbolden nå op fra en starthøjde på 1 m?

Forklar hvorfor bordtennisbolden kan hoppe højere end sin starthøjde. I forklaringen skal du bl.a. bruge begreberne "kinetisk energi" og "potentiell energi".



Boldens nedslagsfart

For en bold, der falder fra lav højde, spiller luftmodstanden ingen rolle. Når sådan en bold falder fra højden h ned mod et gulv eller bord, omdannes boldens potentielle energi til kinetisk energi.

Ud fra formlerne for kinetisk og potentiel energi kan vi udlede den fart, v , som bolden rammer underlaget med

$$v = \sqrt{2 \cdot g \cdot h} \quad (4)$$

Farten afhænger ifølge formlen alene af højden; massen indgår ikke i formlen og tyngdeaccelerationen er jo en konstant. Det betyder, at tunge og lette genstande falder lige hurtigt. Dvs. ifølge denne formel skulle en bordtennisbold og en tennisbold, der slippes fra samme højde, ramme gulvet med samme fart.

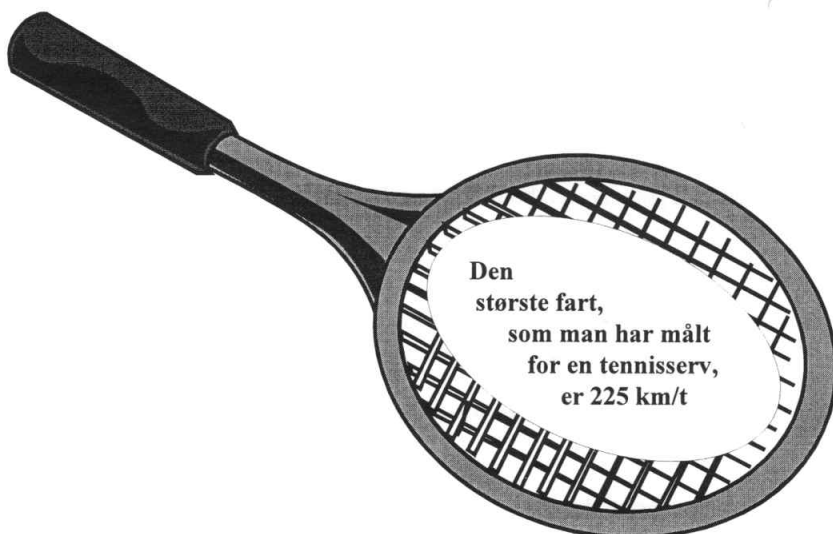
Vi kan dog kun bruge formlen ved fald fra lille højde. Ellers indvirker luftmodstanden på faldet ved at mindske farten.

Opgave 5. Udledning af formel for nedslagsfart

Vis udledning af formel 4, der udregner den fart, som en bold, der slippes fra højden h , rammer gulvet med.

Opgave 6. Nedslagsfart for en tennisbold

Udregn den fart som en tennisbold rammer gulvet med, når den slippes fra den foreskrevne højde.



Hvordan beskriver en fysiker en bolds hoppeegenskab

Vekselvirkningen mellem en bold og et bord eller et gulv kalder fysikerne for et stød, og de beskriver en bolds hoppeegenskab ved det såkaldte stødtal, e .

For en bold, der hopper fra et fast underlag, defineres stødtallet som forholdet mellem boldens fart før stødet, v_1 , og boldens fart efter stødet, v_2 .

$$e = \frac{v_2}{v_1} \quad (5)$$

Da det er svært at måle hastigheder, men lettere at måle højder, vil vi udlede en formel for stødtallet ud fra faldhøjden og hoppehøjden.

Vi betragter nu en bold, der slippes fra højden, h_1 . Fra formel 4 kan vi udregne den fart, bolden rammer gulvet med. Vi kalder farten v_1 .

$$v_1 = \sqrt{2 \cdot g \cdot h_1} \quad (6)$$

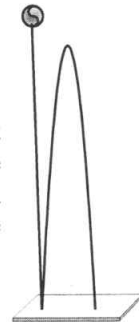
Efter at bolden har ramt gulvet, springer den op med farten v_2 , og den hopper op til højden h_2 . Fra højden h_2 falder den ned til gulvet igen. Boldens fart, når den rammer gulvet anden gang kalder vi v_3 .

$$v_3 = \sqrt{2 \cdot g \cdot h_2} \quad (7)$$

Da der ikke er nogen luftmodstand, må boldens mekaniske energi være konstant fra den springer op fra gulvet til den lander igen. Lige over gulvet har bolden ingen potentiel energi, og heraf følger, at bolden må have samme kinetiske energi, når den netop har sluppet gulvet på vej op, og lige før den rammer gulvet på vej ned igen. Det fortæller os, at bolden må have samme fart i de to tilfælde, dvs. v_2 er lig med v_3 .

Vi kender ikke farten v_2 , som bolden springer op med, men farten v_3 , som den rammer gulvet med lidt senere, kan vi finde fra formel 4. Vi kan derfor omskrive formel 7 til:

$$v_2 = \sqrt{2 \cdot g \cdot h_2} \quad (7)$$



Stødtallet kan derfor ved hjælp af formel 6 og 7 omskrives til

$$e = \frac{v_2}{v_1} = \frac{\sqrt{2 \cdot g \cdot h_2}}{\sqrt{2 \cdot g \cdot h_1}} = \sqrt{\frac{h_2}{h_1}} \quad \text{dvs.} \quad e = \sqrt{\frac{h_2}{h_1}} \quad (8)$$

Forsøg 3. Vi bestemmer stødtallet, e , for en bold

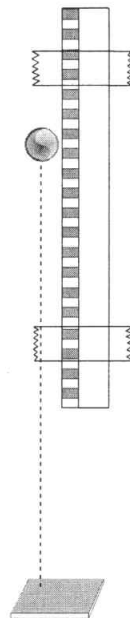
Du kan selv vælge om du vil finde stødtallet for en tennisbold eller en bordtennisbold.

Skriv først hvilken bold du har valgt og nummeret på bolden.

Bolden slippes 10 gange fra den foreskrevne højde, og opspringshøjden måles på en lineal, der er sat fast på væggen med et par tapestrimler.

Udregn stødtallet for hvert opspring og find middelværdien af stødtallet.

Lad opstillingen være; den skal evt. bruges igen til forsøg 4.



Stødtal for en godkendt bold

En godkendt tennisbold skal fra en højde på 2,54 m hoppe op til mellem 1,35 og 1,47 m.

Vi vil finde stødtallet for en tennisbold, der hopper til midt i det tilladte interval, 1,41 m. Ifølge formel 8 bliver stødtallet

$$e_{\text{tennisbold}} = \sqrt{\frac{h_2}{h_1}} = \sqrt{\frac{1,41}{2,54}} = 0,75$$

Opgave 7. Det største stødtal for en tennisbold

Udregn det største stødtal, e_{max} , en godkendt tennisbold kan have.

Opgave 8. Det mindste stødtal for en tennisbold

Udregn det mindste stødtal, e_{min} , en godkendt tennisbold kan have.

Opgave 9. Stødtallet for en bordtennisbold

Udregn inden for hvilke talværdier stødtallet for en godkendt bordtennisbold skal ligge.

Forsøg 4. Vi undersøger stødtallet, e , for en bold

Du kan bruge enten en tennisbold eller en bordtennisbold. Hvis du vil lave forsøget med en bordtennisbold, skal du skrive boldens nummer op.



Stødtallet for bolden findes ved fald fra forskellige højder, h_1 , både større og mindre end den foreskrevne faldhøjde. Opspringshøjden, h_2 , måles. Der laves en tabel med faldhøjde, opspringshøjde og stødtal.

Udregn middelværdien for stødtallet. Hvor mange procent er den største afvigelse på? Er det rimeligt at bruge en gennemsnitsværdi for stødtallet fremover?

I et koordinatsystem afsættes faldhøjden ud ad x-aksen og stødtallet ud ad y-aksen. Ud fra værdierne vurderes det, om stødtallet for bolden faktisk er uafhængigt af højden. Hvis det ikke er tilfældet, skal du give en forklaring på årsagen til stødtallets afhængighed af faldhøjden, og det har ikke noget med luftmodstanden at gøre. Evt. kan du bruge oplysningerne på side 7 om energitabet ved stødet.

Hvad afhænger boldens hoppe-egenskaber af?

Både tennisbolde og bordtennisbolde er fyldt med luft. I tennisbolde kan der være overtryk. Når der spilles med bolden, bliver den lidt varmere på grund af de mange slag, og trykket stiger derfor inde i bolden. Herefter hopper bolden bedre.

Tennisbolde med overtryk taber dog med tiden luft, og allerede få måneder efter at bolden er produceret, vil den derfor hoppe ringere. Ved brug uden for turneringer kan bolden dog bruges meget længere, for hoppehøjden bestemmes ikke kun af lufttrykket i bolden, men også af hvor tykt udlaget på bolden er. Hoppehøjden stiger, jo tyndere udlaget er. Efterhånden som lufttrykket i bolden falder, slides udlaget tilsvarende ned, så boldens hoppeegenskab holdes nogenlunde konstant i længere tid.



I golf
er det almindelig kendt,
at man på kolde dage varmer
bolden op i lommen, nogle endda i
mundten, inden man slår ud fra tee-stederne.

Så slår man længere.

Forsøg 5. Hvordan hopper varme og kolde bolde?

Tennisbolden eller bordtennisbolden fra forsøg 3 skal nu varmes op eller afkøles. En tennisbold skal ligge enten 1 time i en fryser eller ca. 15 minutter i en ovn ved 100 °C (NB. bolden må ikke røre ovnens flader); en bordtennisbold kan nøjes med kortere tid.

Bolden må først tages ud, når forsøget er helt klar til gentagelse af de første målinger i forsøg 3. Når du tager bolden ud af ovnen, skal du med det samme pakke bolden ind i fx et håndklæde, så holder den temperaturen, til forsøget starter. Mens du venter på, at bolden bliver opvarmet eller afkølet, kan du gå videre i hæftet.

Har bolden ændret sit stødtal?

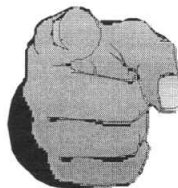
Vil bolden ifølge reglerne kunne godkendes ved den temperatur, den havde, da den kom ud af ovnen eller fryseren?

Hvor langt falder man, og hvor lang tid tager det?

Den længde, s , som en genstand falder i løbet af tiden, t , kan udregnes ved hjælp af **Galileis faldlov** efter den italienske fysiker Galilei. Genstanden skal starte fra hvile, og der må ikke være luftmodstand.

$$s = \frac{1}{2} g \cdot t^2 \quad (9)$$

Når tyngdeaccelerationen, g er lig med 9,82m/s² og t måles i sekunder fås faldlængden s i meter.



Opgave 10. Hvor langt falder man på 1, 2 og 3 sekunder?

Brug Galileis faldlov til at udregne faldlængden til de angivne tider.

Opgave 11. Faldlængde i lufttomt rum

Brug Galileis faldlov til at opstille en tabel for faldlængden, h , som funktion af faldtiden, t . Udregn faldlængden for hvert 0,05 sekund fra nul til 0,5 sekund.

Vi betragter nu en bold, der slippes fra højden h .

Vi vil beregne, hvor lang tid faldet fra højden h ned til gulvet tager. Når vi lader bolden falde ned til vores nulniveau, bliver s lig med h .

For at finde faldtiden omskriver vi Galileis faldlov(9).

Faldtiden, t , bliver derfor, når vi fremover bruger h i stedet for s :

$$t = \sqrt{\frac{2 \cdot h}{g}} \quad (10)$$

Opgave 12. Hvor lang tid tager det at falde ned fra Rundetårn?

Rundetårn er ca. 34 m højt.

Opgave 13. Udregn en tennisbolds faldtid fra højden 2,54 m

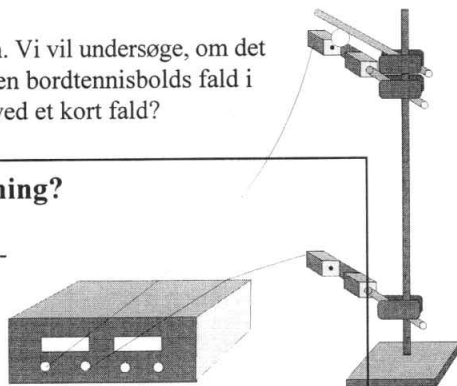
Opgave 14. Udregn en bordtennisbolds faldtid fra 30,5 cm

Hvilken rolle spiller luftmodstanden?

Galileis faldlov gælder kun for fald i et lufttomt rum. Vi vil undersøge, om det er rimeligt at bruge Galileis faldlov til at regne på en bordtennisbolds fald i luft. Hvor meget bremser luftmodstanden bolden ved et kort fald?

Forsøg 6. Er luftmodstanden af betydning?

Der laves en opstilling med tidsmåler og to fotoceller. Opstillingen skal konstrueres sådan, at bordtennisbolden starter faldet fra samme højde, og når bolden begynder at falde, skal den med det samme afbryde lysstrålen i den øverste fotocelle, så uret starter. Når bolden længere nede afbryder lysstrålen i den nederste fotocelle, skal uret stoppe.



For bordtennisbolden skal faldtiden, t , findes for mindst 10 forskellige faldlængder større og mindre end den foreskrevne faldhøjde. Værdierne indsættes i et koordinatsystem med faldtiden ud ad x-aksen og faldlængden op ad y-aksen. Der tegnes en glat og udjævnet kurve gennem de indtegnede punkter.

Fra opgave 11 indsættes de relevante teoretiske værdier for faldlængden som funktion af faldtiden. De afsættes i samme koordinatsystem og punkterne forbindes til en glat kurve.

Hvordan ligger de to grafer i forhold til hinanden? Måske viser de, at der er en systematisk fejl i forsøget. Forklar hvad det kan være.

Hvordan skulle den målte kurve se ud, hvis der blev større og større luftmodstand under faldet?

Ud fra de to kurvers udseende i forhold til hinanden skal det vurderes, om luftmodstanden indvirker på faldet fra de benyttede højder.

Spiller luftmodstanden nogen rolle for en bordtennisbolds fald fra højden 30,5 cm?

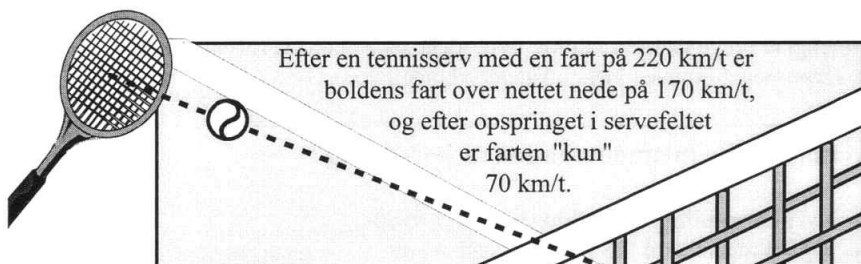
Opgave 15. Luftmodstandens fartafhængighed

Luftmodstanden på en bold afhænger af farten af bolden, således at luftmodstanden er proportional med kvadratet på farten :

$$\text{luftmodstand} \propto v^2$$

Hvor mange gange større er luftmodstanden på en tennisbold, der serves med 80 km/t, i forhold til luftmodstanden på en serv med 40 km/t?

Hvad med 160 km/t i forhold til 40 km/t?



Nu spiller luftmodstanden med

Vi har set, at for et kort fald spiller luftmodstanden ingen rolle. Hvor langt skal bolden falde, før luftmodstanden får betydning? Vi vil undersøge, om man kan bruge Galileis faldlov til at regne på en tennisbold, der falder et længere stykke.

Forsøg 7. Er luftmodstanden af betydning?

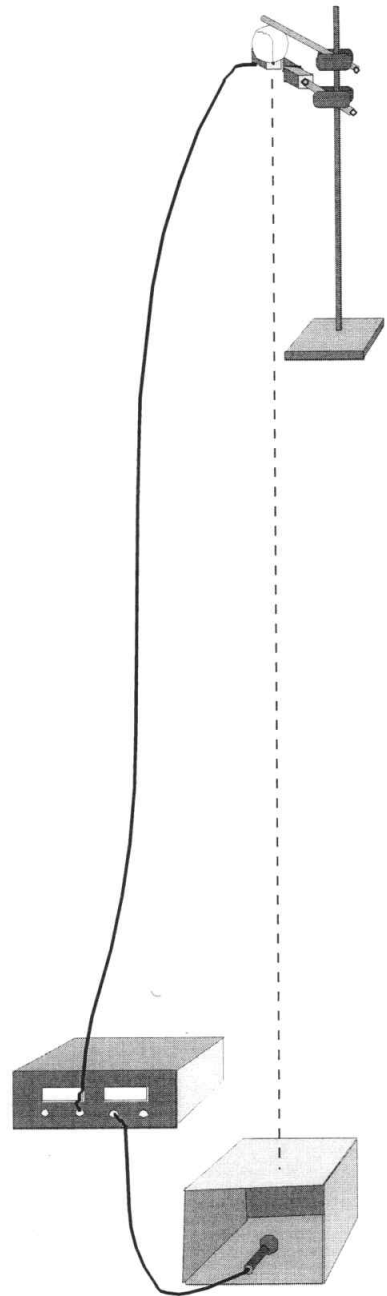
Der laves en opstilling i en trappeskakt eller et lignende sted, hvor der er højt til loftet. Opstillingen skal konstrueres sådan, at tennisbolden starter faldet fra en fast højde, og når bolden begynder at falde, skal den med det samme afbryde lysstrålen i den øverste fotocelle, så uret starter. Når bolden rammer kassen (evt. bare en papkasse), skal lyden i mikrofonen stoppe uret.

Faldtiden, t , findes for forskellige faldlængder meget større end den foreskrevne faldhøjde.

Værdierne indsættes i et koordinatsystem med faldtiden ud ad x-aksen og faldlængden op ad y-aksen. Ud fra punkterne tegnes en glat og udjævnet kurve over den målte sammenhæng.

Ved hjælp af Galileis faldlov udregnes faldlængderne i lufttomt rum for de målte faldtider. Disse teoretiske værdier for faldlængden som funktion af faldtiden indsættes i samme koordinatsystem og punkterne forbindes til en glat kurve.

Ud fra de to kurvers udseende i forhold til hinanden skal det vurderes, om luftmodstanden indvirker på faldet fra de benyttede højder.



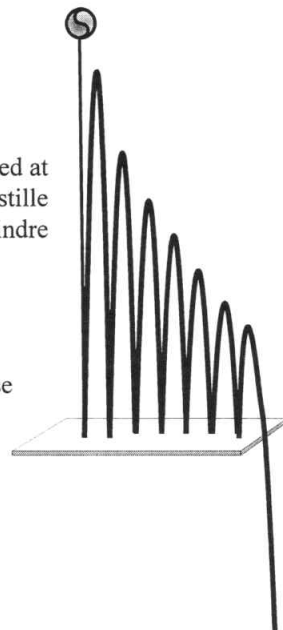
Hvor lang tid kan en bold hoppe?

Når man lader en bold falde, vil den hoppe flere gange, men for hvert hop, vil den ikke nå så højt op som i sidste hop.

Man kan stille spørgsmålet, om bolden overhovedet holder op med at hoppe? Vi ved selvfølgelig alle, at det gør den, men vi kan forestille os, at bolden bliver ved med at hoppe - bare med mindre og mindre hop.

Vi vil finde ud af, hvor længe en bold hopper.

Hvis du i forsøg 3 bestemte stødtal for en tennisbold, skal du løse opgave 16a. Brugte du i forsøg 3 en bordtennisbold, skal du løse opgave 16b.



Opgave 16a. Vi gætter på, hvor lang tid en tennisbold hopper

Gæt på, hvor lang tid det tager, før en tennisbold ikke hopper mere, når den slippes fra en højde på 254 cm ned på et betongulv.

Opgave 16b. Vi gætter på en bordtennisbolds hoppetid

Gæt på og skriv ned, hvor lang tid du tror, en bordtennisbold vil hoppe, når den slippes fra en højde på 30,5 cm ned på et bordtennisbord.

Vi betragter nu en bold, der slippes fra højden h_1 . Efter at have ramt gulvet vil bolden hoppe flere gange til højderne: h_2 , h_3 , h_4 osv.

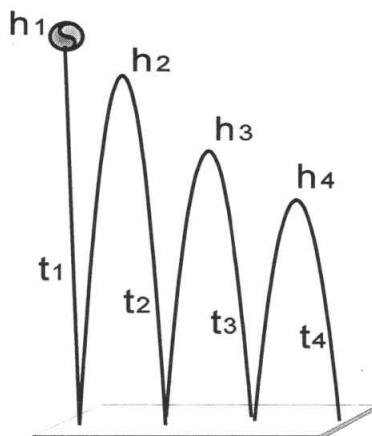
Faldtiden fra højden h_1 ned til gulvet kalder vi t_1 , og faldtiden fra h_2 kaldes t_2 osv.

Ifølge formel 10 var faldtiden, t_1 , givet ved

$$t_1 = \sqrt{\frac{2 \cdot h_1}{g}}$$

Faldet fra højden h_2 tager tiden t_2 .

$$t_2 = \sqrt{\frac{2 \cdot h_2}{g}}$$



Vi udregner forholdet mellem t_2 og t_1 .

$$\frac{t_2}{t_1} = \frac{\sqrt{\frac{2 \cdot h_2}{g}}}{\sqrt{\frac{2 \cdot h_1}{g}}} = \sqrt{\frac{h_2}{h_1}} \quad (11)$$

ved hjælp af formel 8 får vi $\frac{t_2}{t_1} = e$ (12)

dvs. $t_2 = t_1 \cdot e$ (13)

Det tager lige så lang tid for bolden at falde fra højden h_2 ned til gulvet, som det tager at hoppe fra gulvet op til højden h_2 . Derfor bliver tiden mellem første og andet opspring det dobbelte af faldtiden fra højden h_2 , altså $2 t_2$.

Ved brug af formel 13 fås: $2 t_2 = 2 t_1 \cdot e$ (14)

På samme måde bliver tiden mellem andet og tredje opspring lig med $2 t_3$. $2 t_3 = 2 t_2 \cdot e$ (15)

der kan omskrives til $2 t_3 = 2 t_1 \cdot e^2$ (16)

Den samlede tid, som bolden hopper, t_{total} , bliver for uendelig mange hop

$$t_{total} = t_1 + 2 t_2 + 2 t_3 + 2 t_4 + \dots \quad (17)$$

der kan skrives som

$$t_{total} = t_1 + 2 t_1 \cdot e + 2 t_1 \cdot e^2 + 2 t_1 \cdot e^3 + \dots \quad (18)$$

Ved at sætte t_1 uden for parentes fra 2. led og videre ud fås

$$t_{total} = t_1 + 2 t_1 \cdot e (1 + e + e^2 + e^3 + \dots) \quad (19)$$

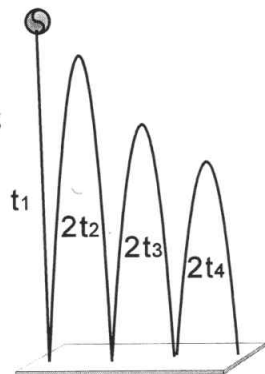
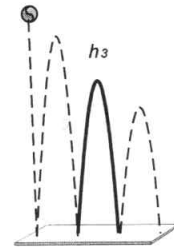
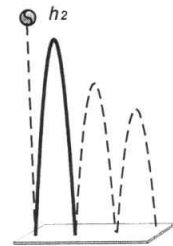
Indholdet i parentesen $1 + e + e^2 + e^3 + \dots$ er en såkaldt geometrisk serie, der med uendelig mange led får summen $1/(1 - e)$

Det indsættes i formel 19 i stedet for parentesen

$$t_{total} = t_1 + 2 t_1 \cdot e \cdot \frac{1}{(1 - e)} \quad (20)$$

der kan omskrives til

$$t_{total} = t_1 \frac{(1 + e)}{(1 - e)} \quad (21)$$



Ved hjælp af formel 21 kan du udregne, hvor lang tid din bold hopper, dvs til den ligger på gulvet uden at hoppe. Bolden stopper med at hoppe efter en tid, der er en faktor $(1+e)/(1-e)$ længere end tiden, t_1 , for det første fald ned til gulvet.

Hvis du i forsøg 3 bestemte stødtallet for en tennisbold, skal du løse opgave 17a og udføre forsøg 8a. Brugte du i forsøg 3 en bordtennisbold er det 17b og forsøg 8b.

Opgave 17a. Vi udregner hoppetiden for en tennisbold

Udregn ved hjælp af formel 21, hvor længe en tennisbold hopper på et beton-gulv, når bolden slippes fra højden 254 cm.

Du skal bruge det stødtal, der er fundet i forsøg 3. Faldtiden t_1 har du udregnet i opgave 13.

Opgave 17b. Vi udregner hoppetiden for en bordtennisbold

Udregn ved hjælp af formel 21, hvor længe en bordtennisbold hopper på et bordtennisbord, når bolden slippes fra en højde på 30,5 cm.

Du skal bruge det stødtal, der er fundet i forsøg 3. Faldtiden t_1 har du udregnet i opgave 14.

Forsøg 8a. Vi måler hoppetiden for en tennisbold

Undersøg ved hjælp af et stopur, hvor lang tid en tennisbold hopper på et betongulv, når den slippes fra højden 254 cm.

Hvordan stemte målingen overens med dit gæt i opgave 15 og resultatet i opgave 17a?

Forsøg 8b. Vi måler hoppetiden for en bordtennisbold

Undersøg ved hjælp af et stopur, hvor lang tid en bordtennisbold hopper, når den slippes fra højden 30,5 cm.

Hvordan stemte målingen overens med dit gæt i opgave 16 og resultatet i opgave 17b?

Formentlig har du målt lidt højere værdier, end du udregnede. Forklaringen på det følger i næste afsnit.

En bold der hopper uendelig mange gange

Formel 21 er meget interessant.

$$t_{total} = t_1 \frac{(1 + e)}{(1 - e)} \quad (21)$$

Vi udledte formelen ved at beregne den tid bolden var i luften ved hvert enkelt hop. En sådan teoretisk bold rammer gulvet og springer op med det samme. Det gør en virkelig bolde ikke. Ved hvert stød mod gulvet deformeres den lidt og skal så rette sig noget ud igen, inden den letter fra gulvet. Disse små tidsrum, som sammenstødene har været, har vi ikke med i formlen. Derfor får vi for små værdier fra formlen i forhold til de målte værdier fra forsøget.

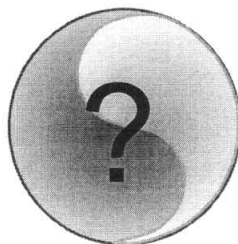
Formlen er altså udledt for en teoretisk bold, der aldrig holder op med at hoppe, men hvor hoppene bare bliver mindre og mindre. Formlen giver et forbløffende resultat:



Måske kan du først forstå dette tankeeksperiment, hvis du ikke tænker på, hvor langt manden går, men hvor meget han mangler at gå. For hvert nyt skridt, går manden kun det halve af det stykke, han mangler op til 2 m. Derfor når han aldrig 2-meter mærket, om han så gik i en million år.

Opgave 18. En hjernevrider

Udtænk en mulig forklaring på, hvordan det i teorien ville kunne lade sig gøre, at en bold hopper uendelig mange gange inden for et bestemt tidsrum.



Hvor højt hopper bolden - hop efter hop?

I opgave 3 udregnede I, hvor mange procent af en godkendt tennisbolds mekaniske energi, der skulle gå tabt i et enkelt hop. Vi vil i dette afsnit regne med dette minimale tab. Dette tab kalder vi fremover for tabsprocenten, og det skrives som et decimaltal.

Opgave 19. Tabsprocenten

Opskriv fra opgave 3, hvor mange procent tab af den mekaniske energi, der mindst skulle være ved opspring af en tennisbold.

Find tabsprocenten ved at omskrive denne værdi til decimaltal (2 decimaler).

Hvis bolden starter faldet fra højden h_0 med den potentielle energi $m \cdot g \cdot h_0$ vil den efter første opspring nå op til højden h_1 , og her har bolden den potentielle energi $m \cdot g \cdot h_1$. Da m og g ikke ændres, må det procentiske tab i potentiel energi svare til det procentiske tab i højde. Dvs. at vi kan udregne h_1 således:

$$h_1 = h_0 \cdot (1 - \text{tabsprocenten}) \quad (22)$$

Vi går ud fra, at der er samme tabsprocent ved hvert af de følgende hop. Efter andet opspring kan højden, h_2 , derfor findes ved:

$$h_2 = h_1 \cdot (1 - \text{tabsprocenten}) \quad (23)$$

Denne formel kan ved indsættelse af formel 22 skrives som:

$$h_2 = h_0 \cdot (1 - \text{tabsprocenten})^2 \quad (24)$$

Vi kunne fortsætte på denne måde med at opskrive formlerne for h_3 , h_4 , osv. Vi kan derfor se, at bolden efter det n 'te opspring hopper op til en højde, h_n , hvor:

$$h_n = h_0 \cdot (1 - \text{tabsprocenten})^n \quad (25)$$

Denne formel til udregning af den n 'te højde beskriver en såkaldt eksponentiel vækst. Begyndeshøjden, h_0 , er fastlagt fra starten og herefter mindskes højden med en fast procent for hvert hop, for tabsprocenten er også fastlagt fra starten.

Opgave 20. Vi udregner, hvor højt en tennisbold hopper - hop for hop

Du skal bruge det på næste side viste regneark til udregningerne. De tomme rækker, 3 og 4, skal bruges i næste opgave.

Du skal udregne, hvor højt en tennisbold hopper efter en starthøjde på 2,54 m, og du skal også finde højden af de næste hop. Hertil skal du bruge tabsprocenten fra opgave 19, for du skal gå ud fra, at der tapes lige meget energi ved hvert hop.

Når et hop i regnearket har et bestemt nummer fx 4, betyder det fremover, at det er opspring nr. 4.

	A	B	C	D
1	starthøjde, h_0 :			m
2	tabsprocenten:			
3				
4				
5				
6	hop	maxhøjde	maxhøjde	
7	nr.	før hop	efter hop	
8		m	m	
9	1			
10				
11				

i de to grå celler skal
du skrive tal



i disse grå celler skal
du skrive formler



Opgave 20 (fortsat).

1. Skriv den viste tekst ind i regnearket.
2. Indskriv værdierne for starthøjden og tabsprocenten i cellerne C1 og C2.

I regneark skal alle formler ved indskrivning i en celle startes med et formelstart-tegn. I regnearket Quattro Pro er det et plustegn, +, og i regnearkene Excel og Works er det et lighedstegn, =.

3. I celle A10 skal vi have en formel, der regner hopnummeret ud fra hopnummeret i foregående celle: Hvis du bruger Quattro Pro skal du skrive **+A9+1**, hvis du bruger et andet regneark skal du skrive **=A9+1**. Flyt markøren ned i A11 og se, hvilken værdi der nu står i celle A10.
4. Nu programmerer vi regnearket til selv at skrive resten af hopnumrene ned til fx hop nr. 20: Sæt markøren i A10 og vælg **kopier (copy)**. Flyt markøren ned til A11 og **træk (drag)** nedad indtil cellerne A11 til A29 er fremhævet. Vælg herefter **indsæt (paste)**. Denne form for kopiering kalder vi "intelligent kopiering".
5. Starthøjden, der står i celle C1, skal også stå i celle B9: Derfor skriver du i celle B9 et formelstart-tegn og derefter C1.
6. Nu skal regnearket udregne max-højden efter 1. hop. Den formel skal stå i celle C9. Formlen er $h_1 = h_0(1 - \text{tabsprocenten})$: Derfor skriver du i celle C9 først et formelstart-tegn, så **B9*(1-\$C\$2)**. Dollartegnene betyder, at værdien af tabsprocenten (celle C2) ikke må ændres i regnearket. Flyt markøren og se hvad der står i celle C9.
7. Indholdet i celle C9 skal også stå i celle B10: Skriv et formelstarttegn og så C9 i celle B10.

Opgave 20 (fortsat).

8. *Celle B10 skal nu kopieres intelligent videre ned i cellerne B11, B12, B13 osv. Det gøres på samme måde, som du gjorde i pkt. 4. Ligeledes skal celle C9 kopieres intelligent videre ned i cellerne C10, C11, osv.*
9. *Udskriv den relevante del af regnearket .*
10. *Udskriv et søjlediagram af hoppehøjden som funktion af hoppenummer. Det viser en eksponentiel vækst, hvor væksten er et tab.*

Hvor mange gange hopper en bold?

Opgave 21. Vi udregner, hvor mange hop en tennisbold foretager

Vi vil udregne, hvor mange gange en tennisbold hopper, når den slippes fra højden 254 cm. Vi vil gå ud fra, at tennisbolden ikke hopper mere, når den mekaniske energi er mindre end fx 1 promille af den potentielle energi bolden havde ved starten af første fald. Denne potentielle energi udregnede du i opgave 1.

Find værdien af 1 promille af tennisboldens potentielle energi i højden 254 cm.

For at udregne hvor mange gange bolden hopper, skal du igen bruge et regneark. Dit regneark fra opgave 20 kan fx udbygges således:

	A	B	C	D
1	starthøjde, h_0 :			m
2	tabsprocent:			
3	masse af tennisbold, m:			målt i kg
4	tyngdeaccelerationen, g:			målt i m/sek^2
5				
6	hop	maxhøjde	maxhøjde	E(pot) på toppen
7	nr.	før hop	efter hop	efter hop
8		m	m	J
9	1			
10	2			
11	3			

i de 2 grå celler
skal du skrive tal



i disse felter skal
du skrive formler



Opgave 21 (fortsat),

1. Indsæt i celle C3 talværdien for massen af tennisbolden fra opgave 1.
2. Indsæt talværdien for tyngdeaccelerationen i celle C4.
3. I celle D9 skal du skrive en udtryk til udregning af den potentielle energi efter hop nr. 1 - start opskrivningen med et formelstarttegn. Formlen skal hente massen fra celle C3, tyngdeaccelerationen fra C4, og maxhøjden efter hop nr. 1 fra celle C9. Du skal beskytte cellenumrene C3 og C4 med dollartegn.
4. Kopiér formlen i D9 videre ned i cellerne D10, D11, D12 osv.
5. Blokmarkér alle D-celler fra D9 og ned. De skal nu indstilles, så tallene i cellerne viser mindst tre decimaler.
6. Udskriv den relevante del af regnearket.
7. Aflæs på regnearket, hvor mange hop skal der til, før boldens mekaniske energi er faldet til under 1 promille af startenergien.

Kan en bold hoppe uendelig langt?

Til opgaverne 22 og 23 kan du fortsætte med dit regneark.

Opgave 22. Hvor langt bevæger en tennisbold sig i alt under hop-pene?

Den godkendte tennisbold skal fra en højde på 254 cm hoppe op til en højde mellem 135 cm og 147 cm. Dvs. efter ét hop har den bevæget sig mindst $254 + 135 = 389$ cm og måske helt op til $254 + 147 = 4$ meter og 1 cm. Hvor langt vil den bevæge sig i alt, efterhånden som den hopper flere gange.

I regnearket fra opgave 21 tilføjes en ekstra kolonne, E. Den skal vise, hvor langt bolden har bevæget sig som funktion af antal hop. Husk at bolden skal både ned og op.

Hvor langt bevæger en godkendt tennisbold med din minimale tabsprocent sig, når den starter i højden 254 cm, og den bliver ved med at hoppe, til den mekaniske energi er mindre end 1 promille af startenergien.

Vi har antaget, at en tennisbold holder op med at hoppe, når dens mekaniske energi er faldet til 1 promille af startenergien, og i opgave 22 har du fundet, hvor langt tennisbolden bevæger sig i løbet af det antal hop, den foretager. Men hvor langt ville bolden have bevæget sig i alt, hvis den aldrig var holdt op med at hoppe?

En sådan bold vil vi kalde en ideal-bold, og vi definerer den som en bold, der aldrig holder op med at hoppe - uanset hvor lille hoppehøjden er.

Vil en godkendt ideal-tennisbold bevæge sig uendeligt langt? Den holder jo aldrig op med at hoppe.

Opgave 23. Hvor langt bevæger en ideal tennisbold sig i alt ?

For at besvare spørgsmålet skal du bruge regnearket fra opgave 22.

Tallene i D-kolonnen skal blokmarkeres og indstilles til fx 6 decimaler.

I regnearket skal du øge antallet af hop til fx. 100, og du skal kopiere det sidste felt i kolonnerne B, C, D og E ned til dette antal hop.

Hvad viser tallene i kolonne E, efterhånden som der bliver flere og flere hop?

Hopper den ideale bold uendeligt langt?

ISBN 87-7792-017-1



9 788777 920172